

Pythagoras and Fermat's Last Theorem

피타고라스 정리

$X^2+Y^2=Z^2$ 의 (X,Y,Z) 를 세변으로 하는 직각삼각형을 구성.

피타고라스 수

$X^2+Y^2=Z^2$ 에서 자연수 (X,Y,Z) , $(3,4,5)$, $(225,272,353)$,
 $(6308330625,6482256128,9045146753)$ 등의 수.

페르마 정리

$n>2$ 일 때, $X^n+Y^n=Z^n$ 은 정수 해가 없음.

$n=1$ 일 때, $X+Y=Z$

모든 자연수 (X,Y) 는 어떤 자연수 Z 를 산출함.

$n=2$ 일 때, $X^2+Y^2=Z^2$

모든 피타고라스 수 (X,Y,Z) 가 자연수임.

$n>2$ 일 때, $X^n+Y^n=Z^n$

자연수 (X,Y,Z) 가 존재할 수 없음.

$$X^n+Y^n=Z^n$$

정수 해 없음=자연수 해 없음

* n 이 짝수일 때, $(-U)^n+V^n=W^n$, $U^n+V^n=W^n$

* n 이 홀수일 때, $(-U)^n+V^n=W^n$, $-U^n+V^n=W^n$, $W^n+U^n=V^n$

$$X^n + Y^n = Z^n$$

$A=Z-Y$, $B=Z-X$ 일 때, 자연수 (X, Y, Z) 에서 (A, B) 도 자연수임.

$$Y+A=X+B=Z$$

$$X-A=Y-B=Z-A-B=X+Y-Z$$

$$(X-A)/(AB)^{1/n}=(Y-B)/(AB)^{1/n}=(Z-A-B)/(AB)^{1/n}=(X+Y-Z)/(AB)^{1/n}$$

다음과 같이 G 를 정함.

$$G=(X-A)/(AB)^{1/n}=(Y-B)/(AB)^{1/n}=(Z-A-B)/(AB)^{1/n}=(X+Y-Z)/(AB)^{1/n}$$

$$X+Y-Z=G(AB)^{1/n}$$

$$X=G(AB)^{1/n}+A, Y=G(AB)^{1/n}+B, Z=G(AB)^{1/n}+A+B$$

$$\{G(AB)^{1/n}+A\}^n + \{G(AB)^{1/n}+B\}^n = \{G(AB)^{1/n}+A+B\}^n$$

$$\{G(AB)^{1/n}+A\}^n+\{G(AB)^{1/n}+B\}^n=\{G(AB)^{1/n}+A+B\}^n$$

n=1 일 때, G=0.

$$X+Y-Z=G(AB)=0, G=0.$$

$$\{G(AB)+A\}+\{G(AB)+B\}=\{G(AB)+A+B\}$$
$$G=0$$

n=2 일 때, $G=2^{1/2}>0$.

$$X+Y-Z=G(AB)^{1/2}>0, G>0.$$

$$\{G(AB)^{1/2}+A\}^2+\{G(AB)^{1/2}+B\}^2=\{G(AB)^{1/2}+A+B\}^2$$
$$G=2^{1/2}>0$$

n=3 일 때, G=함수(A,B)>0.

$$X+Y-Z=G(AB)^{1/3}>0, G>0.$$

$$\{G(AB)^{1/3}+A\}^3+\{G(AB)^{1/3}+B\}^3=\{G(AB)^{1/3}+A+B\}^3$$
$$G=\text{함수}(A,B)>0$$

일반적으로 $\{G(AB)^{1/3}\}$ 해를 구할 수는 없음.

Fermat's Last Theorem Proof

$$X^n + Y^n = Z^n$$

$$(X^{n/2})^2 + (Y^{n/2})^2 = (Z^{n/2})^2$$

$$a = Z^{n/2} - Y^{n/2}, \quad b = Z^{n/2} - X^{n/2}$$

$$\{G(ab)^{1/2+a}\}^2 + \{G(ab)^{1/2+b}\}^2 = \{G(ab)^{1/2+a+b}\}^2$$

$$G = 2^{1/2} > 0$$

$$X^{n/2} = (2ab)^{1/2+a}, \quad Y^{n/2} = (2ab)^{1/2+b}, \quad Z^{n/2} = (2ab)^{1/2+a+b}$$

* n 이 홀수일 때, (X,Y,Z) 는 자연수가 될 수 없음.

$$X^n + Y^n = Z^n$$

$$(X^{n/2})^2 + (Y^{n/2})^2 = (Z^{n/2})^2$$

$$a = Z^{n/2} - Y^{n/2}, \quad b = Z^{n/2} - X^{n/2}$$

홀수 (n) 에서,

$(X^{n/2}, Y^{n/2}, Z^{n/2})$ 중의 둘은 자연수가 될 수도 있으나,

최소한 하나는 자연수가 될 수 없는 것임.

그러므로 $(a$ 또는 $b)$, $(2ab)$, $(2ab)^{1/2}$ 은 자연수가 될 수 없음.

$$X^{n/2} = (2ab)^{1/2} + a, \quad Y^{n/2} = (2ab)^{1/2} + b, \quad Z^{n/2} = (2ab)^{1/2} + a + b$$

$$X^n = a\{a + 2b + 2(2ab)^{1/2}\}, \quad Y^n = b\{2a + b + 2(2ab)^{1/2}\}$$

$$Z^n = a^2 + b^2 + 4ab + 2(a+b)(2ab)^{1/2}$$

$$(XY)^n = ab\{2a^2 + 2b^2 + 13ab + 6(a+b)(2ab)^{1/2}\}$$

홀수 (n) 에서

(X, Y, Z) 가 자연수 일 때,

$X^n, Y^n, Z^n, (XY)^n$ 등은 자연수들이나,

(a 또는 b), (2ab), $(2ab)^{1/2}$ 들이 자연수 될 수 없고,

$$a\{a + 2b + 2(2ab)^{1/2}\}, b\{2a + b + 2(2ab)^{1/2}\},$$

$$a^2 + b^2 + 4ab + 2(a+b)(2ab)^{1/2},$$

$$ab\{2a^2 + 2b^2 + 13ab + 6(a+b)(2ab)^{1/2}\}$$

홀수 (n) 에서,

상기 수들이 자연수가 될 수 없는 모순 발생.

* n 이 짝수일 때, (X, Y, Z) 는 자연수가 될 수 없음.

$$X=(2AB)^{1/2}+A, Y=(2AB)^{1/2}+B, Z=(2AB)^{1/2}+A+B$$

(X, Y, Z) 가 자연수일 때, (A, B) 도 자연수임으로,
 $(2AB)^{1/2}=k$ 의 (X, Y, Z) 는 모든 피타고라스 수임.

$$A=c^2, B=2d^2$$

$$X=2cd+c^2, Y=2cd+2d^2, Z=2cd+c^2+2d^2$$

(X, Y) , (A, B) 와 (c, d) 는 서로 소임으로,
 $(Y$ 또는 $X)$ 는 짝수가 되고, $(X$ 또는 $Y, Z)$ 는 홀수들이 됨.

$$XY=2cd(c+d)(c+2d)$$

XY 가 거듭제곱이 될 수 없음으로,
모든 피타고라스 수는 거듭제곱이 될 없음 증명함.

$$c=e^m, d=2^{(m-1)}f^m,$$

$$c+d=e^m+2^{(m-1)}f^m=s^m, c+2d=e^m+(2f)^m=t^m$$

$$XY=2cd(c+d)(c+2d)=(2efst)^m$$

(XY) 가 거듭제곱이 될 것으로 추측함은 잘못임을 증명함.

$$e^m+(2f)^m=t^m$$

$$(e^{m/2})^2+\{(2f)^{m/2}\}^2=(t^{m/2})^2$$

$$g^2=t^{m/2}-(2f)^{m/2}, 2h^2=t^{m/2}-e^{m/2}$$

$$e^{m/2}=2gh+g^2, (2f)^{m/2}=2gh+2h^2, t^{m/2}=2gh+g^2+2h^2$$

$$e^m=\{2gh+g^2\}^2, (2f)^m=\{2gh+2h^2\}^2, t^m=\{2gh+g^2+2h^2\}^2$$

상기 수들은 모두 자연수들이 됨.

$$e^m = \{2gh + g^2\}^2, (2f)^m = \{2gh + 2h^2\}^2, t^m = \{2gh + g^2 + 2h^2\}^2$$

$$e^{1/2} = \{2gh + g^2\}^{1/m}, (2f)^{1/2} = \{2gh + 2h^2\}^{1/m}, t^{1/2} = \{2gh + g^2 + 2h^2\}^{1/m}$$

상기 수들은 모두 자연수들이 됨.

$$c + 2d = e^m + (2f)^m = t^m$$

$$u^2 = e^m, v^2 = (2f)^m, w^2 = t^m$$

$$u^2 + v^2 = w^2$$

피타고라스 수 (X, Y, Z) 가 거듭제곱 수들이 된다고 하면,
피타고라스 수 (u, v, w) 도 거듭제곱 수들이 되어야 함으로,
모든 피타고라스 수는 거듭제곱이 될 수 없음.

그러므로 $X^n + Y^n = Z^n$ 은 자연수 해가 없는 것이며,
즉, 정수 해가 없음. 증명 끝.

$$u^2+v^2=w^2, \quad g^2=w-v, \quad 2h^2=w-u$$

$$u=2gh+g^2, \quad v=2gh+2h^2, \quad w=2gh+g^2+2h^2$$

$$X^2+Y^2=Z^2, \quad c^2=Z-Y, \quad 2d^2=Z-X$$

$$X=2cd+c^2, \quad Y=2cd+2d^2, \quad Z=2cd+c^2+2d^2$$

$$c^{1/2}=2gh+g^2, \quad (2d)^{1/2}=2gh+2h^2$$

$$(g,h)=(1,1), \quad (u,v,w)=(3,4,5)$$

$$(c,d)=(9,8), \quad (X,Y,Z)=(225,272,353)$$

$$(p,q)=(50625,36992), \quad (6308330625,6482256128,9045146753)$$